2012年 医学部 第1問

$\boxed{1}$ 正の奇数 p に対して，3つの自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，$x^2+4yz=p$ を満たすもの全体の集合を S とおく．すなわち，

$$S=\left\{(x,\ y,\ z)\ \middle|\ x,\ y,\ z\text{は自然数},\ x^2+4yz=p\right\}$$

次の問いに答えよ．

(1) S が空集合でないための必要十分条件は，$p=4k+1$ (k は自然数) と書けることであることを示せ．

(2) S の要素の個数が奇数ならば S の要素 $(x,\ y,\ z)$ で $y=z$ となるものが存在することを示せ．