0001328721768999

徳島大学

2013年 医（保健）・工学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $(x-1)^2-3|x-1|+1<0$ を満たす整数 x をすべて求めよ．

(2) すべての自然数 n に対して，$2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}$ が5の倍数であることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(1) (i) $x \geqq 1$ のとき．

$(x-1)^2-3(x-1)+1<0$　　$\therefore t=x-1$ $(t \geqq 0)$ とおく

$t^2-3t+1<0$　　$\therefore \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<t<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

t：整数として考えると．$t=1,2$　　$\therefore x=2,3$

(ii) $x<1$ のとき．

$(x-1)^2+3(x-1)+1<0$　　$\therefore t=x-1$ $(t<0)$ とおくと．

$t^2+3t+1<0$　　$\therefore \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}<t<\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore t$：整数として考えると．$t=-2,-1$　　$\therefore x=-1,0$

(i)，(ii) より．$\underline{x=-1,0,2,3}$ //

(2) (i) $n=1$ のとき．$2^0+3^1+7^0=5$　　$\therefore$ 5の倍数．

(ii) $n=k$ のとき 成り立つと 仮定すると．$2^{k-1}+3^{3k-2}+7^{k-1}$ は5の倍数

なので，$2^{k-1}+3^{3k-2}+7^{k-1}=5l$ (l：整数) と表せる．

このとき．$2^k+3^{3k+1}+7^k = 2^k+3^{3k+1}+7\cdot(5l-2^{k-1}-3^{3k-2})$

$= -5\cdot 2^{k-1}+20\cdot 3^{3k-2}+35l$

$=5(4\cdot 3^{3k-2}+7l-2^{k-1})$

$\therefore n=k+1$ のときも 5の倍数 となる

(i)，(ii) より．すべての自然数 n に対して．$2^{n-1}+3^{3n-2}+7^{n-1}$ は5の倍数 ▨