0002216183877999

尾道市立大学

2013年 経済情報 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $f(x)$を変数xの2次関数，$F(x)$を$f(x)$の原始関数とする（つまり$F'(x)=f(x)$である）．また$f(x)$と$F(x)$は次の関係を満たすとする．

$$3xF(x)-f(x)^2=x^3-7x^2-12x-9$$

このとき，次の問いに答えなさい．

(1) $f(x)$を求めなさい．

(2) 定積分$\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\,dx$の値が最小となる実数$a$と，そのときの定積分の値を求めなさい．

(1) $f(x)$：2次関数より，$F(x)$：3次関数

$\therefore F(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ とおくと，

$f(x)=3ax^2+2bx+c$

これらを与式に代入すると，

$3x(ax^3+bx^2+cx+d)-(3ax^2+2bx+c)^2=x^3-7x^2-12x-9$

xの降べきの順に整理すると，

$3a(1-3a)x^4+3b(1-4a)x^3+(3c-4b^2-6ac)x^2+(3d-4bc)x-c^2 = x^3-7x^2-12x-9$

これがxについての恒等式であることから，

$$\begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ 3b(1-4a)=1 \\ 3c-4b^2-6ac=-7 \\ 3d-4bc=-12 \\ c^2=9 \end{cases} \iff a=\frac{1}{3},\ b=-1,\ c=-3,\ d=0$$

よって，$\underline{f(x)=x^2-2x-3}$ //

(2) $g(a)=\displaystyle\int_a^{a+1}f(x)\,dx$ とおくと，$g(a)=\Big[F(x)\Big]_a^{a+1}=F(a+1)-F(a)$

$\therefore g'(a)=f(a+1)-f(a)$

$=(a+1)^2-2(a+1)-3-(a^2-2a-3)$

$=2a-1$

a	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(a)$	$-$	0	+
$g(a)$	↘	$g(\frac{1}{2})$	↗

右の増減表より，最小となるaは $\underline{a=\frac{1}{2}}$ //

そのときの定積分の値は，$g(\frac{1}{2})=F(\frac{3}{2})-F(\frac{1}{2})=\frac{1}{3}(\frac{3}{2})^3-(\frac{3}{2})^2-3\cdot\frac{3}{2}-\left\{\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^3-(\frac{1}{2})^2-3\cdot\frac{1}{2}\right\}=\underline{-\frac{47}{12}}$ //