

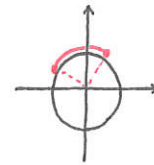
2016年 経済情報 第4問

4 関数 $f(\theta) = \sqrt{2}(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta) - \cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta)$ について次の問いに答えなさい。ただし $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ とする。

- (1) $t = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ とおくと、 t の値の取りうる範囲を求めなさい。
 (2) $\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta)$ を t を用いて表しなさい。
 (3) 関数 $f(\theta)$ を t を用いて表したものを $g(t)$ とするとき、 $g(t)$ の最大値と最小値、および最大値と最小値を与える t の値を求めなさい。
 (4) 関数 $f(\theta)$ の最大値と最小値、および最大値と最小値を与える θ の値を求めなさい。

$$(1) t = 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ より, } \frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{6}\pi \text{ より, } \underline{1 \leq t \leq 2}$$



$$(2) t^2 = \sin^2\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta$$

$$= 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 1 + 2\cos^2\theta$$

$$\text{よって, } \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{t^2 - 1}{2}$$

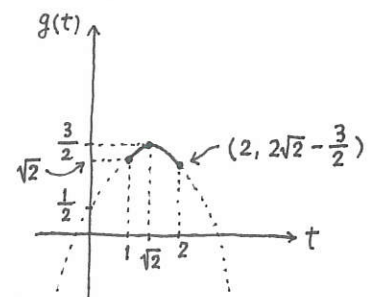
$$\therefore \underline{\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta) = \frac{t^2 - 1}{2}}$$

$$(3) g(t) = \sqrt{2}t - \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 + \sqrt{2}t + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(t^2 - 2\sqrt{2}t) + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(t - \sqrt{2})^2 + \frac{3}{2}$$



右のグラフより、最大値 $\frac{3}{2}$ ($t = \sqrt{2}$ のとき)、最小値 $2\sqrt{2} - \frac{3}{2}$ ($t = 2$ のとき)

$$(4) t = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{5}{12}\pi$$

$$t = 2 \Leftrightarrow 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

\therefore 最大値 $\frac{3}{2}$ ($\theta = \frac{5}{12}\pi$)、最小値 $2\sqrt{2} - \frac{3}{2}$ ($\theta = \frac{\pi}{6}$)