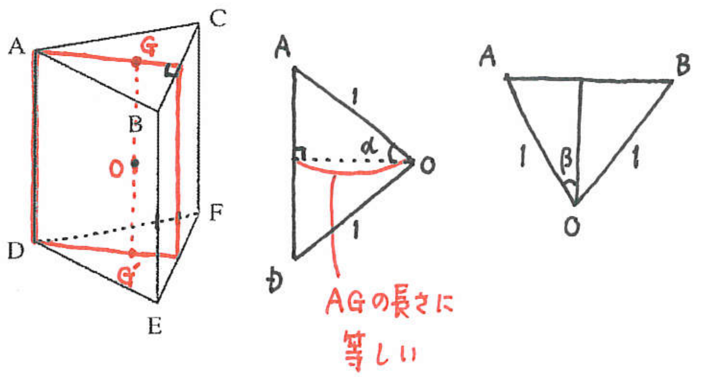
0001648811538999

大阪市立大学

2014年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 図のような三角柱ABC-DEFが中心O，半径1の球に内接している．すなわち，三角柱の頂点A，B，C，D，E，Fはすべて，中心O，半径1の球面上にある．また，三角形ABCと三角形DEFは合同な正三角形で，四角形ADEB，四角形BEFC，四角形CFDAは合同な長方形であるとする．$\angle AOD = 2\alpha$，$\angle AOB = 2\beta$とおく．ただし，$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \frac{\pi}{3}$とする．次の問いに答えよ．



(1) $\dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}$ の値を求めよ．

(2) 三角柱ABC-DEFの体積Vをαを用いて表せ．

(3) Vの最大値を求めよ．

(1) $\triangle ABC$と$\triangle DEF$の重心をそれぞれG, G'とするとOは線分GG'の中点となる．

$\therefore AB = r$とおくと，$AG = \frac{\sqrt{3}}{2}r \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}r$ であるから．

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}r$，$\sin\beta = \frac{1}{2}r$　　$\therefore \underline{\dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ //

(2) (1)より．$r = \sqrt{3}\cos\alpha$ より．$\triangle ABC = \frac{1}{2}r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{3\sqrt{3}}{4}\cos^2\alpha$

また，$AD = 2\sin\alpha$ より．$\underline{V = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha}$ //

(3) $x = \sin\alpha$ とおくと，$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より．$0 < x < 1$ で

$V(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x^2)$　　$\therefore V'(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}(1-3x^2)$

∴増減表は右のようになる

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	(1)
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$	(0)	$\nearrow$	1	$\searrow$	(0)

$\therefore$ $\underline{V\text{の最大値は } 1 \ (\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{ のとき})}$ //