獨協医科大学

2014年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ 行列 $A = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ で表される1次変換 f について考える．点 P_0 の座標を $(1,\ 0)$ とし，n を正の整数とするとき，f によって点 P_{n-1} が移される点を P_n とする．また，$\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{OP}_k} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ となる点 Q_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とし，$n\to\infty$ のときに x_n，y_n がともに収束する場合の点 Q_n の極限値 $\mathrm{Q}\left(\lim_{n\to\infty} x_n,\ \lim_{n\to\infty} y_n\right)$ を求めよう．

(1) $r = \frac{1}{2}$，$\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき，$A^3 = \frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}\begin{pmatrix} \boxed{エ} & \boxed{オ} \\ \boxed{オ} & \boxed{エ} \end{pmatrix}$ であり，P_7 の座標は $\left(\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キクケ}},\ \frac{\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{キクケ}}\right)$ である．

(2) $E-A$ が逆行列をもたない r，θ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ の条件は，$r = \boxed{サ}$ かつ $\theta = \boxed{シ}$ である．ただし，E は単位行列とする．

$E-A$ が逆行列をもつとき，n を2以上の整数とすると

$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{n-1}) = E-A^n$ より

$$E+A+A^2+\cdots+A^{n-1} = (E-A)^{-1}(E-A^n)$$

また，$(E-A)^{-1} = \frac{1}{r^2-2r\cos\theta+1}\begin{pmatrix} 1-r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & 1-r\cos\theta \end{pmatrix}$ であるから

$(E-A)^{-1}(E-A^n) = \frac{1}{r^2-2r\cos\theta+1}T$ とすると

$$T = \begin{pmatrix} 1-r\cos\theta-r^n\boxed{ス}+r^{n+1}\boxed{セ} & -r\sin\theta+r^n\boxed{ソ}-r^{n+1}\boxed{タ} \\ r\sin\theta-r^n\boxed{ソ}+r^{n+1}\boxed{タ} & 1-r\cos\theta-r^n\boxed{ス}+r^{n+1}\boxed{セ} \end{pmatrix}$$

である．ただし，$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$，$\boxed{ソ}$，$\boxed{タ}$ には，次の①～⑥の中から最も適切なものをそれぞれ一つ選ぶこと．なお，同じ選択肢を選んでもよいものとする．

① $\sin n\theta$　② $\cos n\theta$　③ $\sin(n-1)\theta$　④ $\cos(n-1)\theta$　⑤ $\sin(n+1)\theta$　⑥ $\cos(n+1)\theta$

$0 \leqq r < 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} x_n$，$\lim_{n\to\infty} y_n$ はともに収束し，さらに $\theta = \frac{\pi}{3}$ とすると，

$$\mathrm{Q} = \left(\frac{\boxed{チ}-r}{\boxed{ツ}-2r+\boxed{テ}r^2},\ \frac{\sqrt{\boxed{ト}}\,r}{\boxed{ツ}-2r+\boxed{テ}r^2}\right)$$

である．