



2011年理系第4問

4 a, b, c を正の定数とし, x の関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える. 以下, 定数は全て実数とする.

(1) 定数 p, q に対し, 次をみたす定数 r が存在することを示せ.

$$x \geq 1 \quad \text{ならば} \quad |px + q| \leq rx$$

(2) 恒等式 $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$ を用いて, 次をみたす定数 k, l が存在することを示せ.

$$x \geq 1 \quad \text{ならば} \quad \left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \leq \frac{l}{x}$$

(3) すべての自然数 n に対して, $\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする. このとき関数 $f(x)$ は, 自然数の定数 m を用いて $f(x) = (x + m)^3$ と表されることを示せ.