2014年 理工学部 第1問

数理 石井K

ポイント
$\begin{cases} \alpha^3 = -1. \\ \alpha^2 - \alpha + 1 = 0 \end{cases}$
をみたす.

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ.

(1) 3次方程式 $x^3+1=0$ の -1 でない解の1つを α とするとき,

$$(3+7\alpha)(7+3\alpha)-4(1+\alpha^2) = \boxed{\text{ア}}\,\alpha$$

75

となる.

(2) 三角形ABCにおいて,

$$\text{AB}=2,\quad \angle\text{ACB}=\frac{\pi}{4},\quad \angle\text{BAC}=\frac{\pi}{3}$$

であるとき, AC $=$ $\boxed{\text{イ}}$ である.

$1+\sqrt{3}$

(3) $X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ および自然数 n に対し,

$$3X^n-5X^3Y+X^2Y^2+XY^3+Y^n=\begin{pmatrix} \boxed{\text{ウ}} & \boxed{\text{エ}} \\ \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{カ}} \end{pmatrix}$$

ウ $(-3)^n$　エ 0　オ 0　カ $(-3)^n$

となる.

(4) a, b を $a>0$, $b>1$ となる実数とする. 放物線 $y=-ax^2+b$ と円 $x^2+y^2=1$ の共有点が2個であるための必要十分条件は, $b=\boxed{\text{キ}}$ かつ $a>\boxed{\text{ク}}$ が成り立つことである. ただし, $\boxed{\text{キ}}$ には a の式, $\boxed{\text{ク}}$ には数を記入すること.

$a+\frac{1}{4a}$　　$\frac{1}{2}$

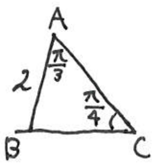
(1) (左辺) $= 21+58\alpha+21\alpha^2-4-4\alpha^2$

$= 17\alpha^2+58\alpha+17$

$= 17(\underbrace{\alpha^2+1})+58\alpha$

$\alpha^2+1=\alpha$ より.

$= 75\alpha$ //



(2) 正弦定理より.

$$\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$\therefore\ BC=\sqrt{6}$

余弦定理より. $6=4+x^2-2\cdot 2x\cdot\frac{1}{2}$

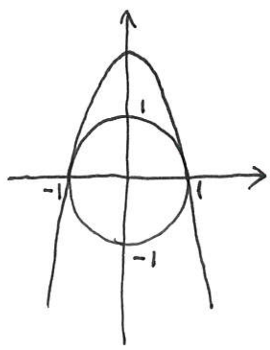
$x>0$ より. $x=1+\sqrt{3}$ //

(3) $X^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=X$, $Y=-3E$ より.

(与式) $= 3X-5X\cdot(-3E)+X\cdot 9E+X\cdot(-27E)+(-3)^nE$

$= (-3)^nE$

$= \begin{pmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$ //



(4) $ax^2=b-y$　$\therefore\ x^2=\frac{b-y}{a}$

$a\neq 0$ なので

$\therefore\ \frac{b-y}{a}+y^2=1$　$\therefore\ ay^2-y+b-a=0$

$D=1-4a(b-a)=0$　$\therefore\ b=a+\frac{1}{4a}$ //

このとき. $y=\frac{1}{2a}$　$\therefore\ -1<\frac{1}{2a}<1$　$\therefore\ a>\frac{1}{2}$ //