

2013年数学科・物理学科（共通問題）第3問

3 数列  $\{a_n\}$  を次のように定める。

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, \quad a_{n+3} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1)  $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq 2a_n$  を示せ。(2)  $a_n \leq \sqrt{2^n}$  を示せ。さらに、数列  $\{b_n\}$  を

$$b_n = \begin{cases} 0 & a_n \text{ が偶数のとき} \\ 1 & a_n \text{ が奇数のとき} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。また、自然数  $k$  に対して、条件

$$p_k : \text{すべての自然数 } n \text{ について } b_{n+k} = b_n \text{ が成り立つ}$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(3) 条件  $p_k$  を満たす最小の自然数  $k$  を求めよ。(4)  $p, q, r$  を整数とし、数列  $\{a_n\}$  の  $a_1, a_2, a_3$  を  $a_1 = p, a_2 = q, a_3 = r$  に置き換え、数列  $\{b_n\}$  もそれぞれにあわせて置き換える。 $p, q, r$  をどのように選んでも、条件  $p_k$  を満たす自然数  $k$  が存在することを示せ。