大阪大学

2017 年 理系 第 1 問

$\boxed{1}$ 双曲線 $H : x^2 - y^2 = 1$ 上の 3 点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$，C$(s,\ t)$ $(t \neq 0)$ を考える．

(1) 点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき，P の座標を s と t を用いてあらわせ．

(2) 点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき，Q の座標を s と t を用いてあらわせ．

(3) 点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明せよ．

(1) 点Aにおける H の接線は．$x = -1$，

直線 BC は．$y = \dfrac{t}{s-1}(x-1)$

これらより，$y = -\dfrac{2t}{s-1}$　　$\therefore$ $\underline{P\left(-1,\ -\dfrac{2t}{s-1}\right)}$ $_{//}$

(2) 点Cにおける H の接線は．$sx - ty = 1$

直線 AB は．$y = 0$

$\therefore\ sx = 1$

ここで，$t \neq 0$ より，$|s| > 1$　$\therefore\ x = \dfrac{1}{s}$　　$\therefore$ $\underline{Q\left(\dfrac{1}{s},\ 0\right)}$ $_{//}$

(3) 点Bにおける H の接線は，$x = 1$

直線 AC は．$y = \dfrac{t}{s+1}(x+1)$

$\therefore\ y = \dfrac{2t}{s+1}$　　$\therefore\ R\left(1,\ \dfrac{2t}{s+1}\right)$

直線 PR は．$y = \dfrac{\frac{2t}{s+1} - \left(-\frac{2t}{s-1}\right)}{1-(-1)} \cdot (x-1) + \dfrac{2t}{s+1} \iff y = \dfrac{2st}{s^2-1}x - \dfrac{2t}{s^2-1}$

ここで，点Cは H 上の点より，$s^2 - t^2 = 1$　$\therefore\ s^2 - 1 = t^2$

したがって，直線 PR は．$y = \dfrac{2s}{t}x - \dfrac{2}{t} \iff y = \dfrac{2s}{t}\left(x - \dfrac{1}{s}\right)$

$\therefore\ x = \dfrac{1}{s}$ のとき $y = 0$ となる．すなわち，直線 PR は点Qを通る．

$\therefore$ 3点 P，Q，R は一直線上にある ▨