大阪大学

2012年 理系 第1問

$\boxed{1}$ $a>0$とする．C_1を曲線$x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$，C_2を直線$y=2ax-3a$とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点PがC_1上を動き，点QがC_2上を動くとき，線分PQの長さの最小値を$f(a)$とする．$f(a)$をaを用いて表せ．

(2) 極限値$\displaystyle\lim_{a\to\infty} f(a)$を求めよ．

(1) $P(\cos\theta, a\sin\theta)$と表せるので，点と直線のキョリ公式より．

$$PQ = \frac{|2a\cos\theta - a\sin\theta - 3a|}{\sqrt{4a^2+1}}$$

$$= \frac{a|\sin\theta - 2\cos\theta + 3|}{\sqrt{4a^2+1}} \quad (\because a>0)$$

$$= \frac{a|\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)+3|}{\sqrt{4a^2+1}}$$

（ここで α は $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ をみたす実数）

$-1 \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$ より， $f(a) = \dfrac{(3-\sqrt{5})a}{\sqrt{4a^2+1}}$ //

(2) $$\lim_{a\to\infty} f(a) = \lim_{a\to\infty} \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{4+\frac{1}{a^2}}}$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$ //