



2011年文系第2問

2 実数の組  $(p, q)$  に対し,  $f(x) = (x - p)^2 + q$  とおく.

- (1) 放物線  $y = f(x)$  が点  $(0, 1)$  を通り, しかも直線  $y = x$  の  $x > 0$  の部分と接するような実数の組  $(p, q)$  と接点の座標を求めよ.
- (2) 実数の組  $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$  に対して,  $f_1(x) = (x - p_1)^2 + q_1$  および  $f_2(x) = (x - p_2)^2 + q_2$  とおく. 実数  $\alpha, \beta$  (ただし  $\alpha < \beta$ ) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば, 区間  $\alpha \leq x \leq \beta$  において不等式  $f_1(x) < f_2(x)$  がつねに成り立つことを示せ.

- (3) 長方形  $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$  を考える. また, 4点  $P_0(0, 1), P_1(0, 0), P_2(1, 1), P_3(1, 0)$  をこの順に線分で結んで得られる折れ線を  $L$  とする. 実数の組  $(p, q)$  を, 放物線  $y = f(x)$  と折れ線  $L$  に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき,  $R$  の点のうちで放物線  $y = f(x)$  が通過する点全体の集合を  $T$  とする.  $R$  から  $T$  を除いた領域  $S$  を座標平面上に図示し, その面積を求めよ.