大阪大学

2011年 理系 第3問

$\boxed{3}$ 実数の組 $(p,\ q)$ に対し，$f(x)=(x-p)^2+q$ とおく．

(1) 放物線 $y=f(x)$ が点 $(0,\ 1)$ を通り，しかも直線 $y=x$ の $x>0$ の部分と接するような実数の組 $(p,\ q)$ と接点の座標を求めよ．

(2) 実数の組 $(p_1,\ q_1)$，$(p_2,\ q_2)$ に対して，$f_1(x)=(x-p_1)^2+q_1$ および $f_2(x)=(x-p_2)^2+q_2$ とおく．実数 $\alpha,\ \beta$ (ただし $\alpha<\beta$) に対して

$$f_1(\alpha)<f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta)<f_2(\beta)$$

であるならば，区間 $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において不等式 $f_1(x)<f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ．

(3) 長方形 $R:0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2$ を考える．また，4点 $\mathrm{P}_0(0,\ 1)$，$\mathrm{P}_1(0,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする．実数の組 $(p,\ q)$ を，放物線 $y=f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，R の点のうちで放物線 $y=f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする．R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し，その面積を求めよ．