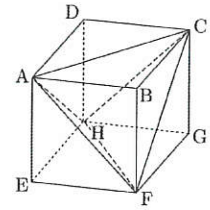
琉球大学

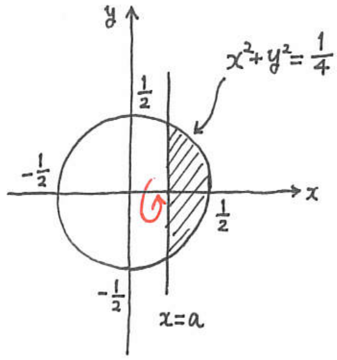
2013年 理系 第1問

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．



(1) 直径1の球を球の中心から距離 a の平面で切って二つの部分に分けたとき，中心を含まない部分の体積を求めよ．ただし，$0 < a < \frac{1}{2}$ とする．

(2) 1辺の長さが1である立方体ABCD-EFGHを考える．この立方体に内接する球と正四面体ACFHとの共通部分の体積を求めよ．



(1) 右図の斜線部分を x 軸のまわりに1回転させる．

円の方程式は，

$x^2+y^2=\frac{1}{4}$ であるから，

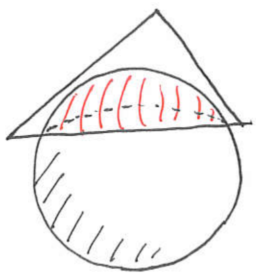
$$V(a)=\pi\int_a^{\frac{1}{2}} y^2\,dx$$

$$=\pi\int_a^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}-x^2\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{x}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_a^{\frac{1}{2}}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{24}-\frac{a}{4}+\frac{a^3}{3}\right)$$

$$=\underline{\left(\frac{1}{12}-\frac{a}{4}+\frac{a^3}{3}\right)\pi}\ //$$



(2) 正四面体の各面は右のように球を切りとる．

また，三角すいBAFCは，底面を△ABFと考えると，高さがBCなので

体積は，$\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

一方，△AFCを底面と考えて，点Bから△AFCに下ろした垂線の足をIとおくと，

体積は，$\underbrace{\triangle AFC}_{\text{1辺が}\sqrt{2}\text{の正三角形}}\times BI\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times BI\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}BI$

$\therefore\ \frac{1}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}BI$ より，$BI=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ∴球の中心と平面AFCのキョリ a は，

$a=\frac{BH}{2}-BI=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 球は4つの面で同じように切りとられるので

(1)より，切りとられた体積の和は，$V\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\times4$，これを球の体積 $\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3$ から引いて，$\frac{4\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3-4\cdot V\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$

$$=\underline{\frac{8\sqrt{3}-9}{54}\pi}\ //$$