

2011年工学部第2問

2 実数  $\theta$  に対して、行列  $A$  を  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  とする。また、 $n$  を自然数とし、 $A$  の  $n$  乗を  $A^n$  で表す。次に答えよ。

(1) 数学的帰納法により、すべての自然数  $n$  に対して

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

が成立することを示せ。

(2)  $\theta = \frac{\pi}{12}$  とする。ある自然数  $n$  に対しては、行列  $A^n$  によって曲線  $y = -\frac{1}{2x}$  上の点が常に曲線  $x^2 - y^2 = -1$  上の点に移される。このような自然数  $n$  の最小値を求めよ。