大阪府立大学

2015年 理系 第3問

3 四面体OABCが与えられており，各辺の長さが

$$\mathrm{OA}=2,\quad \mathrm{OB}=3,\quad \mathrm{OC}=3,\quad \mathrm{AB}=3,\quad \mathrm{BC}=2,\quad \mathrm{CA}=3$$

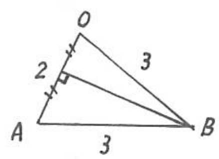
であるとする．また，点O，A，Cを通る平面をα，点O，A，Bを通る平面をβとし，点Bを通り平面αに垂直な直線をg，点Cを通り平面βに垂直な直線をhとする．

(1) 内積$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を求めよ．

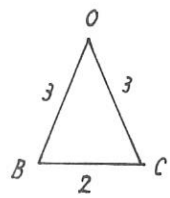
(2) 直線gと平面αの交点をP，直線hと平面βの交点をQとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を表せ．

(3) 直線gと直線hは交わることを示せ．また，直線gと直線hの交点をRとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を表せ．

(1) 右図より．



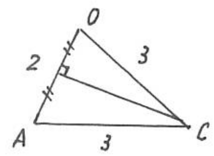
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\cdot3\cdot\frac{1}{3}=2$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=3\cdot3\cdot\frac{3^2+3^2-2^2}{2\cdot3\cdot3}=7$



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2\cdot3\cdot\frac{1}{3}=2$

$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2,\ \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=7,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2}$ //

(2) Pはα上の点より $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC}$ (s,tは実数)と表せる．

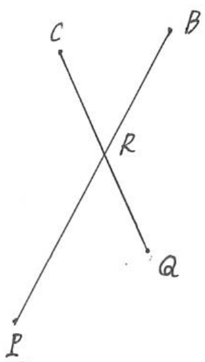


このとき．$\overrightarrow{BP}=s\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{BP}\perp\alpha$ より $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{OC}=0$

よって，$4s-2+2t=0$ かつ $2s-7+9t=0$

これを解いて．$s=\frac{1}{8}$，$t=\frac{3}{4}$　$\therefore\ \underline{\overrightarrow{OP}=\frac{1}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}}$ //



同様に．$\overrightarrow{OQ}=u\overrightarrow{OA}+v\overrightarrow{OB}$ (u,vは実数)と表せて．

同様のことをくり返して．$\underline{\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}}$ //

(3) $\overrightarrow{BR}=k\overrightarrow{BP}=k\left(\frac{1}{8}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC}\right)$　$\therefore\ \overrightarrow{OR}=\frac{k}{8}\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}+\frac{3}{4}k\overrightarrow{OC}$ …①

$\overrightarrow{CR}=l\overrightarrow{CQ}=l\left(\frac{1}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)$　$\therefore\ \overrightarrow{OR}=\frac{l}{8}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}l\overrightarrow{OB}+(1-l)\overrightarrow{OC}$ …②

①，②の係数を比べて．$k=l=\frac{4}{7}$　よって解が存在するのでgとhは交わり．

$\underline{\overrightarrow{OR}=\frac{1}{14}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{OC}}$ //