# 大阪府立大学

2015年 第4問

数理 石井K

**4** $a$, $b$, $p$, $q$ を実数の定数（ただし $a<b$）とする．2次方程式

(*)　$x^2-px+q=0$

について以下の問いに答えよ．

(1) (*)が実数解をもち，それらがともに $a$ 以上 $b$ 以下であるための必要十分条件を $p$, $q$ についての連立不等式で表せ．

(2) (1)で導いた $p$, $q$ についての連立不等式を満たす座標平面上の点 $(p,\ q)$ 全体の集合を $D$ とするとき，$a$, $b$ を用いて $D$ の面積を表せ．

(1) (*)が実数解をもつので，判別式を $D$ とすると，

$D=p^2-4q\geqq 0$ …①

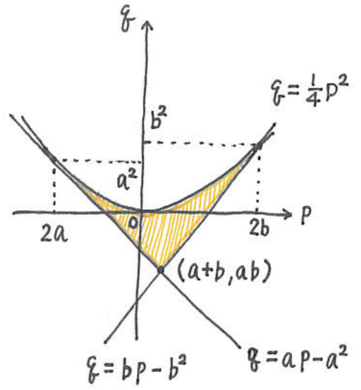
$f(x)=x^2-px+q$ とおく．

$a\leqq$(軸)$\leqq b$ より．$a\leqq \dfrac{p}{2}\leqq b$　∴ $2a\leqq p\leqq 2b$ …②

$f(a)\geqq 0$ かつ $f(b)\geqq 0$ より．$a^2-pa+q\geqq 0$ かつ $b^2-pb+q\geqq 0$ …③

①〜③より

$$\begin{cases} q\leqq \dfrac{p^2}{4} \\ 2a\leqq p\leqq 2b \\ q\geqq ap-a^2 \\ q\geqq bp-b^2 \end{cases}$$




(2) $q=\frac{1}{4}p^2$ の点 $(t,\frac{1}{4}t^2)$ における接線は．$q'=\frac{1}{2}p$ より．

$q=\frac{1}{2}t(p-t)+\frac{1}{4}t^2$　∴ $q=\frac{1}{2}tp-\frac{1}{4}t^2$

∴ $q=ap-a^2$ は $q=\frac{1}{4}p^2$ の $(2a,\ a^2)$ における接線，

$q=bp-b^2$ は 〃 $(2b,\ b^2)$ 〃 を表している．

また，これらの接線の交点を求めると，$(a+b,\ ab)$ となる．

∴ $D$ の面積を $S$ とすると．$S=\displaystyle\int_{2a}^{a+b}\frac{1}{4}p^2-ap+a^2\,dp+\int_{a+b}^{2b}\frac{1}{4}p^2-bp+b^2\,dp$

$=\displaystyle\int_{2a}^{a+b}\left(\frac{1}{2}p-a\right)^2dp+\int_{a+b}^{2b}\left(\frac{1}{2}p-b\right)^2dp$

$=\left[\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}p-a\right)^3\right]_{2a}^{a+b}+\left[\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}p-b\right)^3\right]_{a+b}^{2b}$

$=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{b}{2}-\dfrac{a}{2}\right)^3-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{2}\right)^3$

$=\dfrac{1}{6}(b-a)^3$