

2012年文系第2問

2 関数  $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$  について、以下の問いに答えよ。

(1)  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  を求めよ。

(2)  $f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2}$  を示せ。

(3) すべての自然数  $n$  に対して  $b_n = f\left(\frac{1}{2^n}\right)$  は無理数であることを、数学的帰納法を用いて示せ。ただし、有理数  $r, s$  を用いて表される実数  $r + s\sqrt{2}$  は  $s \neq 0$  ならば無理数であることを、証明なく用いてもよい。