



2014年理系第3問

3 整数  $m, n$  は  $m \geq 1, n \geq 2$  をみたすとする。次の問いに答えよ。

- (1)  $x > 0$  のとき、 $y = \log x$  の第1次導関数  $y'$  と第2次導関数  $y''$  を求めよ。
- (2) 座標平面上の3点  $A(m, \log m), B(m+1, \log m), C(m+1, \log(m+1))$  を頂点とする三角形の面積を  $S_m$  とする。  $S_m$  を  $m$  を用いて表せ。
- (3)  $f(m) = \log m + S_m - \int_m^{m+1} \log x dx$  とおく。  $f(m) < 0$  が成り立つことを、 $y = \log x$  のグラフを用いて説明せよ。
- (4)  $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) < 0$  であることを用いて、不等式

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) < n \log n - n + 1 - \frac{1}{2} \log n$$

を証明せよ。

- (5) 不等式  $n! < e\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$  を証明せよ。ただし、 $e$  は自然対数の底である。