

2015年理系第5問

5  $n$ は自然数,  $a$ は $a > \frac{3}{2}$ をみたす実数とし, 実数 $x$ の関数

$$f(x) = \int_0^x (x - \theta)(a \sin^{n+1} \theta - \sin^{n-1} \theta) d\theta$$

を考える. ただし,  $n = 1$ のときは $\sin^{n-1} \theta = 1$ とする.

(1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} \theta d\theta = \frac{n}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \theta d\theta$ を示せ.

(2)  $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$ をみたす $n$ と $a$ の値を求めよ.

(3) (2)で求めた $n$ と $a$ に対して,  $f(\frac{\pi}{2})$ を求めよ.