2013年 理学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1$$
$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

を満たすとき，一般項 a_n を求めよ．

$$a_n - a_{n-1} = -\frac{1}{2}(a_{n-1} - a_{n-2}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2(a_{n-2} - a_{n-3}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(a_2 - a_1)$$

$$\therefore a_n - a_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} a_1 \quad \cdots ①$$

$$a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-2} = \cdots = a_2 + \frac{1}{2}a_1$$

$$\therefore a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} = a_1 \quad \cdots ②$$

① + ② × 2 より，$3a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}a_1 + 2a_1$

$$\therefore a_n = \frac{2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3} a_1 \quad \cdots (*)$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}a_1 = 2$ より $a_1 = 3$

(*) に代入して，$\underline{a_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ //