

2014年医学部第1問

1 p を正の実数として、放物線 $C: y^2 = 4px$ を定める。 C の頂点を O 、焦点を F 、準線を $l: x = -p$ とする。 C 上の2点 $A(a, 2\sqrt{pa})$ ($a > 0$) と $B(b, -2\sqrt{pb})$ ($b > 0$) を考えるとき、以下の問いに答えよ。

(1) A における C の接線を $\ell(A)$ とし、 $\ell(A)$ と準線 l との交点を P とする。 $\ell(A)$ の方程式をかいて、 P の座標を求めよ。また、線分 AP の長さは線分 AF の長さより大きいことを示せ。

(2) 接線 $\ell(A)$ が直線 AB と A において直交するとき、 b を a, p を用いて表せ。また a が $0 < a < \infty$ の範囲内を動くとき、 b の最小値を求めよ。

以下 (2) の最小値を実現する C 上の2点を A_0, B_0 とし、接線 $\ell(A_0)$ と準線 l の交点を P_0 とする。

(3) 直線 OA_0 と直線 P_0B_0 は O において直交することを示せ。

(4) $\triangle A_0OB_0$ の面積を S 、線分 A_0B_0 と C で囲まれた図形の面積を T とするとき、比 $S:T$ を求めよ。