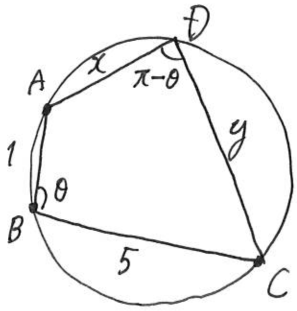
0001475184258999

自治医科大学

2011 年 第 10 問

数理 石井K

$\boxed{10}$ 円に内接する四角形 ABCD について考える（$\angle ABC = \theta$ とする）．四角形 ABCD の面積は，$4\sqrt{6}$ である．辺 AB および辺 BC の長さが，それぞれ，1，5 であり，$\cos\theta = -\dfrac{1}{5}$ となるとき，辺 CD の長さを求めよ．ただし，辺 CD の長さは辺 AD の長さより大きいものとする．



ABCDが円に内接することから

$\angle ADC = \pi - \theta$

また余弦定理より

$AC^2 = 1 + 25 - 2\cdot 5\cos\theta$

$= 26 + 2$

$= 28$

$\cos\theta = -\frac{1}{5}$ より

$\sin^2\theta = 1 - \frac{1}{25}$

$= \frac{24}{25}$

$\therefore \sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

また，$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 5\cdot \sin\theta$

$= \sqrt{6}$

ここで，$AD = x$，　$CD = y$ とおくと

$\triangle ADC = \frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot \sin(\pi - \theta)$

$= \frac{\sqrt{6}}{5}xy$

$\therefore \sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{5}xy = 4\sqrt{6}$　　$\therefore xy = 15 \cdots ①$

また，余弦定理より，$AC^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(\pi - \theta)$

①より，$28 = x^2 + y^2 - 30\cdot\frac{1}{5}$　　$\therefore x^2 + y^2 = 34 \cdots ②$

①，②より　　$\left(\frac{15}{y}\right)^2 + y^2 = 34$　　$y^4 - 34y^2 + 225 = 0$

$(y^2 - 25)(y^2 - 9) = 0$　　$x < y$ より　$\underline{y = 5}$