2012年第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ $x>0$ に対し関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

と定め，$g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\frac{d}{dx}f(x)$ を求めよ．

(2) $\frac{d}{dx}g(x)$ を求めよ．

(3) $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ を求めよ．

ポイント

$$\frac{d}{dx}\int_0^x h(t)\,dt = h(x)$$

(1) $\underline{\frac{d}{dx}f(x)=\frac{1}{1+x^2}}$ //

(2) 合成関数の微分より ⟶ $\frac{d}{dx}\cdot f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)$ となる．

$$\frac{d}{dx}g(x)=\frac{d}{dx}\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=\underline{-\frac{1}{1+x^2}}\ //$$

(3) $$\frac{d}{dx}\left\{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=\underbrace{\frac{d}{dx}f(x)}_{(1)}+\underbrace{\frac{d}{dx}\left\{f\left(\frac{1}{x}\right)\right\}}_{(2)}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}$$

$$=0$$

$\therefore\ f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=C$ （定数）となる．ここで $x=1$ を代入すると，

$$C=2f(x)=2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{2}$$

$t=\tan\theta$ とおいて置換積分

t	$0\to1$
θ	$0\to\frac{\pi}{4}$

, $dt=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$\therefore\ \underline{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}}$ //