0001828721718999

奈良女子大学

2014 年 第 3 問

数理 石井K

3 関数 $f(x) = 4\sin x + 2\cos 2x + 1$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$ を求めよ．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3
			極大		極小		極大		極小		

(1) $f'(x) = 4\cos x - 4\sin 2x$

$= 4\cos x - 8\sin x\cos x$

$= 4\cos x(1 - 2\sin x)$

$\therefore$ $f'(x) = 0$ となるのは．$\cos x = 0$ または．$\sin x = \frac{1}{2}$

すなわち．$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$

右上の増減表より．極大値 $4\left(x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right)$，極小値 $3\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$，$-5\left(x = \frac{3}{2}\pi\right)$ //

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} 4\sin x + 2\cos 2x + 1\,dx = \Big[-4\cos x + \sin 2x + x\Big]_0^{2\pi}$

$= 2\pi$ //

(3) $f(x) = 0$ となるのは．$4\sin x + 2(1 - 2\sin^2 x) + 1 = 0$

$(2\sin x + 1)(2\sin x - 3) = 0$ 　$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より．$x = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$

$\therefore$ 上の増減表とあわせて考えると．$\frac{7}{6}\pi \leqq x \leqq \frac{11}{6}\pi$ では．$f(x) \leqq 0$

$\displaystyle\therefore \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{\frac{7}{6}\pi} f(x)\,dx + \int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} -f(x)\,dx + \int_{\frac{11}{6}\pi}^{2\pi} f(x)\,dx$

$\displaystyle = \underbrace{\int_0^{2\pi} f(x)\,dx}_{\text{(2)が使える}} - 2\int_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} f(x)\,dx$

$= 2\pi - 2\Big[-4\cos x + \sin 2x + x\Big]_{\frac{7}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi}$

$= 2\pi - 2\left(-2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{11}{6}\pi + 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{6}\pi\right)$

$= \frac{2}{3}\pi + 10\sqrt{3}$ //