新潟大学

2012年 第3問

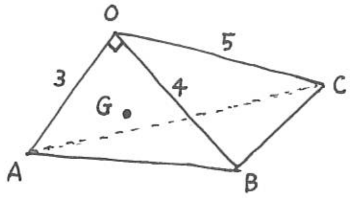
数理 石井K

$\boxed{3}$ 四面体OABCにおいて，OA ⊥ OB，OA = 3，OB = 4，OC = 5とする．△OABの重心をGとし，直線CGは△OABを含む平面に垂直とする．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{CG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{c}$ および $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(3) 四面体OABCの体積を求めよ．



(1) 重心の定義より

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$
$$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}$$
$$= \underline{\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}} \,//$$

(2) CG ⊥ 平面OAB より．

$\overrightarrow{CG} \perp \vec{a}$ かつ $\overrightarrow{CG} \perp \vec{b}$

すなわち，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{CG} = 0$ かつ $\vec{b}\cdot\overrightarrow{CG} = 0$

(1)より．
$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{CG} = \vec{a}\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right)$$
$$= \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}$$
$$= 3 - \vec{a}\cdot\vec{c} \quad (\because |\vec{a}| = 3,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \text{ より})$$

$$\therefore \underline{\vec{a}\cdot\vec{c} = 3} \,//$$

同様に，
$$\vec{b}\cdot\overrightarrow{CG} = \vec{b}\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{3}|\vec{b}|^2 - \vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$= \frac{16}{3} - \vec{b}\cdot\vec{c} \quad (\because |\vec{b}| = 4,\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \text{ より})$$

$$\therefore \underline{\vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{16}{3}} \,//$$

(3) (1)より．
$$|\overrightarrow{CG}|^2 = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right)$$
$$= \frac{1}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \frac{2}{9}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{b}\cdot\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}$$
$$= 1 + \frac{16}{9} + 25 - \frac{2}{3}\cdot\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\cdot 3 \quad (\because (2) \text{ より})$$
$$= \frac{200}{9}$$

$\therefore |\overrightarrow{CG}| = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$ となり．(四面体OABC) $= \dfrac{1}{3}\cdot\triangle OAB\cdot CG = \dfrac{1}{3}\cdot 6\cdot\dfrac{10\sqrt{2}}{3} = \underline{\dfrac{20\sqrt{2}}{3}}\,//$