



2015年医学部第1問



1 方程式 $y^2 = x^6(1-x^2)$ が表す図形で囲まれた面積を求めなさい。

$$(-y)^2 = y^2, (-x)^6 \{1 - (-x)^2\} = x^6(1-x^2) \text{ より,}$$

図形は x 軸, y 軸に関して対称

$$\text{よって, } x \geq 0, y \geq 0 \text{ の範囲で考えると, } y = x^3 \sqrt{1-x^2}$$

根号内が 0 以上であることから, $0 \leq x \leq 1$

よって, $y=0$ となるのは, $x=0, 1$

求める面積を S とおくと,

$$\frac{S}{4} = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$$

$t=1-x^2$ とおいて置換積分する. $dt = -2x dx$, $\frac{x}{t} \parallel \begin{matrix} 0 \rightarrow 1 \\ 1 \rightarrow 0 \end{matrix}$

$$\frac{S}{4} = \int_1^0 -\frac{1}{2}(1-t)\sqrt{t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{t} - t\sqrt{t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right)$$

$$= \frac{2}{15}$$

$$\therefore S = \frac{8}{15} //$$

