大阪府立大学

2014年 第2問

数理 石井K

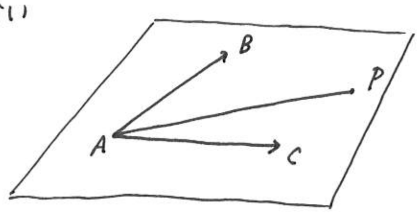
$\boxed{2}$ 座標空間内に3点 A(1, 1, 2), B(3, 5, 7), C(4, 4, 5) がある．また，s, t は実数であるとして，点 P(s, t, 4) を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点Pが3点A，B，Cを通る平面上にあるための s, t の関係式を求めよ．

(2) 点Pが直線AB上にあるときの s, t の値を求めよ．

(3) 点Pが3点A，B，Cを通る平面上を動くとき，その軌跡により三角形ABCは二つの部分に分けられる．この二つの部分の面積の比の値 r を求めよ．ただし，$r \geqq 1$ とする．

(1) $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC}$ となる実数 k, l が存在すればよい



$\therefore (s-1, t-1, 2) = k(2, 4, 5) + l(3, 3, 3)$

$\therefore \begin{cases} s-1 = 2k+3l & \cdots ① \\ t-1 = 4k+3l & \cdots ② \\ 2 = 5k+3l & \cdots ③ \end{cases}$

①−③より $s-3 = -3k \cdots ④$　②−③より $t-3 = -k \cdots ⑤$

④−⑤×3より．$s-3t+6=0$　$\therefore$ $\underline{s-3t=-6}$ //

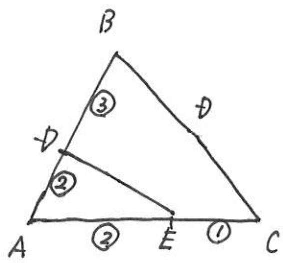
(2) $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB}$ となる実数 m が存在すればよい

$\therefore (s-1, t-1, 2) = m(2, 4, 5)$

$\therefore \begin{cases} s-1 = 2m \\ t-1 = 4m \\ 2 = 5m \end{cases} \iff \begin{cases} s = \frac{9}{5} \\ t = \frac{13}{5} \\ m = \frac{2}{5} \end{cases}$　$\therefore$ $\underline{s = \frac{9}{5},\ t = \frac{13}{5}}$ //

(3) (1)より．P$(s, 2-\frac{s}{3}, 4)$ は直線上を動くので

この直線（軌跡）とAB，ACの交点を求める．



(2)より．ABとの交点Dは．$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ より．

線分ABを 2:3 に内分する点，となる．

(2)と同様にして．$\overrightarrow{AP} = n\overrightarrow{AC}$ となる n を求めると．$n=\frac{2}{3}$

$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$　$\therefore$ 線分ACを 2:1 内分する．この点をEとおくと．

$\therefore \triangle ADE = \triangle ABC \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}\triangle ABC$　$\therefore$ 四角形BDEC $= \frac{11}{15}\triangle ABC$

$\therefore$ $\underline{r = \frac{11}{4}}$ //