

2015年工学域(中期)第5問

5 座標平面上において、原点  $O$  を中心とする半径  $1$  の円  $C_0$  に、半径  $1$  の円  $C_1$  が外接しながらすべることなく回転する。点  $A$  を動く円  $C_1$  の中心とし、点  $P$  を円  $C_1$  の円周上の定点とする。最初、点  $A$  は座標  $(2, 0)$  の位置にあり、点  $P$  は座標  $(1, 0)$  の位置にある。円  $C_1$  が円  $C_0$  の周りを反時計まわりに一周し、点  $A$  が座標  $(2, 0)$  に戻ってくるとき、点  $P$  のえがく曲線を  $C$  とする。動径  $OA$  が  $x$  軸の正の部分から角  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) だけ回転した位置にあるとき、点  $P$  の座標を  $(x(\theta), y(\theta))$  とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点  $P$  の座標  $(x(\theta), y(\theta))$  について、

$$x(\theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta, \quad y(\theta) = 2\sin\theta - \sin 2\theta$$

が成り立つことを示せ。

(2) 導関数  $\frac{d}{d\theta}x(\theta)$  を求め、 $x(\theta)$  の  $\theta$  に関する増減表を作成せよ。ただし、凹凸については言及しなくてよい。

(3) 曲線  $C$  で囲まれる図形の面積  $S$  を求めよ。