

2015年理系第2問

2 異なる  $n$  個のものから異なる  $r$  個を取り出して並べる順列の総数

$${}_n\mathbf{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \quad (\text{ただし } n \geq r \geq 1)$$

に関して以下の問いに答えよ.

- (1)  $k > r$  ならば  ${}_k\mathbf{P}_r = \frac{1}{r+1}({}_{k+1}\mathbf{P}_{r+1} - {}_k\mathbf{P}_{r+1})$  が成り立つことを示せ.
- (2)  ${}_r\mathbf{P}_r + {}_{r+1}\mathbf{P}_r + {}_{r+2}\mathbf{P}_r + \cdots + {}_{n+r-1}\mathbf{P}_r = \frac{n+r}{r+1}{}_{r+1}\mathbf{P}_r$  が成り立つことを示せ.
- (3) 次の等式がすべての自然数  $k$  に対して成り立つような定数  $A, B, C$  を求めよ.

$$k^4 = {}_{k+3}\mathbf{P}_4 + A \times {}_{k+2}\mathbf{P}_3 + B \times {}_{k+1}\mathbf{P}_2 + C \times {}_k\mathbf{P}_1$$

- (4)  $\frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}$  を  $n$  の 3 次式で表せ.