豊橋技術科学大学

2013年 工学部 第1問

$\boxed{1}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 2a & -a^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，以下の問いに答えよ．ただし，n は自然数とする．

(1) AP を求めよ．

(2) $B=P^{-1}AP$ を求めよ．

(3) B^n を求めよ．

(4) A^n を求めよ．

(1) $AP=\begin{pmatrix} 2a & -a^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ a & 1 \end{pmatrix}}$ //

(2) $B=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}AP=-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ a & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ a & 1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}}$ //

(3) $B^2=\begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$，$B^3=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$，…

$\therefore B^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ と推測できる．これを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき．

$B^1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ となり，(2)より成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，

$B^k=\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$ が成り立つ

$\therefore B^{k+1}=B\cdot B^k=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^k \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$

$\therefore$ $n=k+1$ のときも成り立つ

(i)，(ii)より．すべての自然数 n について，$\underline{B^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}}$ が成り立つ ▨ //

(4) $B^n=(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$ より，　$A^n=P\cdot B^n\cdot P^{-1}$

$\therefore A^n=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n \\ a^n & na^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$

$=\underline{\begin{pmatrix} (n+1)a^n & -na^{n+1} \\ na^{n-1} & (1-n)a^n \end{pmatrix}}$ //