2013年 教育 第3問

数理 石#K

$\boxed{3}$ a，b を正の定数とする．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |a\sin x + b\cos x|\,dx$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}}\left(\log\frac{k}{n}\right)|a\sin nx + b\cos nx|\,dx$ を求めよ．

(1) $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$ $\left(\begin{array}{l}\alpha\text{は実数で}\\ \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{array}\right)$ と表せるので

$a>0$，$b>0$ なので，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ であることがわかる．

$a\sin x + b\cos x \geqq 0$ となるのは，

$0\leqq x\leqq \pi-\alpha$，$2\pi-\alpha\leqq x\leqq 2\pi$

よって，(与式) $= \displaystyle\int_0^{\pi-\alpha}\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)\,dx + \int_{\pi-\alpha}^{2\pi-\alpha} -\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)\,dx + \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)\,dx$

$= \Big[-\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\alpha)\Big]_0^{\pi-\alpha} + \Big[\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\alpha)\Big]_{\pi-\alpha}^{2\pi-\alpha} + \Big[-\sqrt{a^2+b^2}\cos(x+\alpha)\Big]_{2\pi-\alpha}^{2\pi}$

$= \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+b^2}\cos\alpha + \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+b^2}\cos(2\pi+\alpha) + \sqrt{a^2+b^2}$

$= \underline{4\sqrt{a^2+b^2}}$ //

(2) (与式) $= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\log\frac{k}{n}\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}}|a\sin nx + b\cos nx|\,dx$

$t=nx$ として 置換積分

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\log\frac{k}{n}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}|a\sin t + b\cos t|\cdot\frac{1}{n}\cdot dt$

(1) の結果より．

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\log\frac{k}{n}\cdot 4\sqrt{a^2+b^2}$

$= 4\sqrt{a^2+b^2}\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$

区分求積法

$= 4\sqrt{a^2+b^2}\displaystyle\int_0^1\log(x+1)\,dx$

$= 4\sqrt{a^2+b^2}\left\{\Big[(x+1)\log(x+1)\Big]_0^1 - \int_0^1 dx\right\}$

$= \underline{4\sqrt{a^2+b^2}\cdot(2\log 2 - 1)}$ //

$\left(4\sqrt{a^2+b^2}\log\frac{4}{e}\right.$ でもよい$\left.\right)$