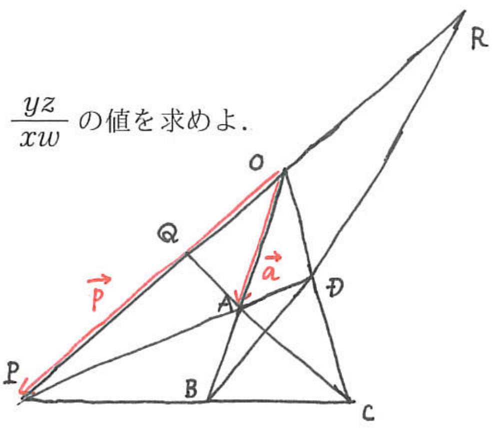
2012年 医学部 第2問　　1枚目／2枚

2 四角形 ABCD において，直線 AB と直線 CD は点 O で交わり，直線 BC と直線 DA は点 P で交わり，直線 OP と直線 AC は点 Q で交わり，直線 OP と直線 BD は点 R で交わっているとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OC}=h\vec{a}+k\vec{p}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OB}$ を $\vec{a}$，h，k を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{p}$，h，k を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{OQ}=x\vec{p}$，$\overrightarrow{OR}=y\vec{p}$，$\overrightarrow{PQ}=z\vec{p}$，$\overrightarrow{PR}=w\vec{p}$ とするとき，$\dfrac{yz}{xw}$ の値を求めよ．



(1) $PB : BC = s : (1-s)$ とおく

$\overrightarrow{OB}=(1-s)\vec{p}+s\overrightarrow{OC}$

$=sh\vec{a}+(sk+1-s)\vec{p}$

一方，$\overrightarrow{OB}=t\vec{a}$ と表せるので（t：実数）

$sk+1-s=0$　　∴ $s=\dfrac{1}{1-k}$　　∴ $\underline{\overrightarrow{OB}=\dfrac{h}{1-k}\vec{a}}$ //

(2) $PA : AD = u : (1-u)$ とおく．

$\overrightarrow{OD}=v\overrightarrow{OC}$ とおくと．$\overrightarrow{OD}=vh\vec{a}+vk\vec{p}$

このとき．$\overrightarrow{OA}=(1-u)\vec{p}+u\cdot\overrightarrow{OD}$ より．$\vec{a}=(1-u)\vec{p}+uvh\vec{a}+uvk\vec{p}$

∴ $(uvh-1)\vec{a}+(uvk+1-u)\vec{p}=\vec{0}$　　$\vec{a}$ と $\vec{p}$ は一次独立なので

∴ $uvh=1$ かつ $uvk+1-u=0$

∴ $\dfrac{k}{h}+1-u=0$　　∴ $u=\dfrac{k}{h}+1$，$v=\dfrac{1}{k+h}$

∴ $\underline{\overrightarrow{OD}=\dfrac{h}{k+h}\vec{a}+\dfrac{k}{k+h}\vec{p}}$ //

(3) $\triangle OPC$ において．チェバの定理より．$\dfrac{PB}{BC}\cdot\dfrac{CD}{DO}\cdot\dfrac{OQ}{QP}=1$

(1)，(2) の議論より．$\dfrac{s}{1-s}\cdot\dfrac{1-\frac{1}{k+h}}{\frac{1}{k+h}}\cdot\dfrac{OQ}{QP}=1$　　∴ $\dfrac{OQ}{QP}=\dfrac{k}{1-k-h}$

2枚目へつづく

島根大学

2012年 医学部 第2問　　2枚目 / 2枚　　数理 石井K

$\boxed{2}$ 四角形ABCDにおいて，直線ABと直線CDは点Oで交わり，直線BCと直線DAは点Pで交わり，直線OPと直線ACは点Qで交わり，直線OPと直線BDは点Rで交わっているとする．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OC}=h\vec{a}+k\vec{p}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OB}$ を $\vec{a}$，h，k を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{p}$，h，k を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{OQ}=x\vec{p}$，$\overrightarrow{OR}=y\vec{p}$，$\overrightarrow{PQ}=z\vec{p}$，$\overrightarrow{PR}=w\vec{p}$ とするとき，$\dfrac{yz}{xw}$ の値を求めよ．

(3) つづき メネラウスの定理より．

$$\frac{CB}{BP}\cdot\frac{PR}{RO}\cdot\frac{OD}{DC}=1$$

$$\therefore\ \frac{1-s}{s}\cdot\frac{PR}{RO}\cdot\frac{\frac{1}{k+h}}{1-\frac{1}{k+h}}=1$$

$$\therefore\ -k\cdot\frac{PR}{RO}\cdot\frac{1}{k+h-1}=1 \qquad \therefore\ \frac{PR}{RO}=\frac{1-k-h}{k}$$

$$\therefore\ \text{以上より.}\quad x=\frac{k}{1-h},\quad y=-\frac{k}{1-2k-h},\quad z=-\frac{1-k-h}{1-h},\quad w=-\frac{1-k-h}{1-2k-h}$$

$$\therefore\ \frac{yz}{xw}=\left(-\frac{k}{1-2k-h}\right)\cdot\left(-\frac{1-k-h}{1-h}\right)\cdot\frac{1-h}{k}\cdot\left(-\frac{1-2k-h}{1-k-h}\right)$$

$$=\underline{-1}\,/\!/$$