

2017年 医学部 第5問

5 複素数平面上の原点  $O$  を中心とする半径  $1$  の円周上にある  $3$  点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$ ,  $C(\gamma)$  を  $3$  頂点とする直角三角形でない三角形  $\triangle ABC$  を考える.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  を原点の周りに角  $2\theta$  ( $0 < 2\theta < \pi$ ) 回転させて得られる点をそれぞれ  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  とする. 直線  $AB$  と  $A_1B_1$  の交点を  $R$  とする.  $AB$  の中点を  $M$ ,  $A_1B_1$  の中点を  $M_1$  とする.

- (1)  $\triangle OMR$  と  $\triangle OM_1R$  は合同であることを示せ.  
 (2)  $\angle MOR = \theta$  であることを示せ.

$BC$  と  $B_1C_1$  の交点,  $CA$  と  $C_1A_1$  の交点をそれぞれ  $P$ ,  $Q$  とする. また,  $i$  を虚数単位とし,  $\lambda = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{2\cos\theta}$  とおく.

- (3) 点  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  を表す複素数をそれぞれ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$  によって表せ.  
 (4) ある点  $D(\delta)$  を中心として,  $\triangle ABC$  を回転しある一定の比率で拡大または縮小すると  $\triangle PQR$  に重なることを示し, このような  $\delta$  を  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\lambda$  によって表せ.