0001944365508999

福岡大学

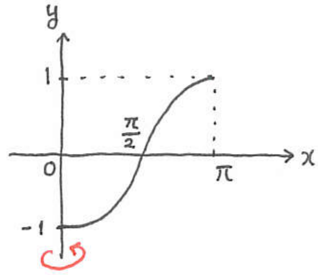
2011 年 工・薬学部 第 4 問

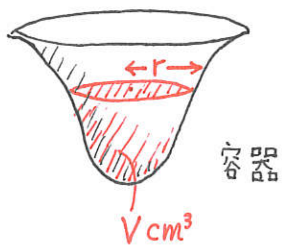
数理 石井K

$\boxed{4}$ 曲線 $y=-\cos x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ を y 軸のまわりに 1 回転させてできる形をした容器がある．ただし，単位は cm とする．この容器に毎秒 $1\,\mathrm{cm}^3$ ずつ水を入れたとき，t 秒後の水面の半径を r cm とし，水の体積を $V\,\mathrm{cm}^3$ とする．水を入れ始めてからあふれるまでの時間内で考えるとき，次の問いに答えよ．

(1) 水の体積 V を r の式で表せ．

(2) 水を入れ始めて t 秒後の r の増加する速度 $\dfrac{dr}{dt}$ を r の式で表せ．





(1) $V=\displaystyle\int_{-1}^{-\cos r} \pi x^2\,dy$

ここで $\begin{array}{c|c} y & -1 \to -\cos r \\ \hline x & 0 \to r \end{array}$ であるから．

$V=\displaystyle\int_0^r \pi x^2 \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx$

$=\pi\displaystyle\int_0^r x^2 \cdot \sin x\,dx$

$=\pi\displaystyle\int_0^r x^2 (-\cos x)'\,dx$

$=\pi\Big[-x^2\cos x\Big]_0^r+\pi\displaystyle\int_0^r 2x\cos x\,dx$

$=-\pi r^2\cos r+2\pi\displaystyle\int_0^r x(\sin x)'\,dx$

$=-\pi r^2\cos r+2\pi\Big[x\sin x\Big]_0^r-2\pi\Big[-\cos x\Big]_0^r$

$=-\pi r^2\cos r+2\pi r\sin r+2\pi\cos r-2\pi$

$=\underline{\pi(-r^2\cos r+2r\sin r+2\cos r-2)}$ //

(2) $t=V$ と (1) より．$t=\pi(-r^2\cos r+2r\sin r+2\cos r-2)$

両辺を t で微分して，$1=\dfrac{d}{dr}\left\{\pi(-r^2\cos r+2r\sin r+2\cos r-2)\right\}\cdot\dfrac{dr}{dt}$

よって，$1=\pi(-2r\cos r+r^2\sin r+2\sin r+2r\cos r-2\sin r)\cdot\dfrac{dr}{dt}$

$\therefore\ \underline{\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{1}{\pi r^2\sin r}\quad(0<r<\pi)}$ //