香川大学

2011年 教育学部・農学部 第2問

2 S_n は数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和とする．第 n 項 a_n と S_n は

$$S_n + na_n = 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたしている．このとき，次の問に答えよ．

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ．

(2) a_n と S_n を n を用いて表せ．

(1) $n=1$ を代入して．$S_1 + a_1 = 1$

$\therefore\ 2a_1 = 1$ より．$\underline{a_1 = \frac{1}{2}}$ //

$n=2$ を代入して．$S_2 + 2a_2 = 1$

$\therefore\ a_1 + 3a_2 = 1$ $\quad \therefore\ \underline{a_2 = \frac{1}{6}}$ //

$n=3$ を代入して．$S_3 + 3a_3 = 1$

$\therefore\ a_1 + a_2 + 4a_3 = 1$ $\quad \therefore\ \underline{a_3 = \frac{1}{12}}$ //

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ のとき．

$S_{n+1} + (n+1)a_{n+1} = 1$ …①

$S_n + na_n = 1$ …②

①−②より．$S_{n+1} - S_n + (n+1)a_{n+1} - na_n = 0$

ここで，$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ より．$(n+2)a_{n+1} = na_n$

両辺に $(n+1)$ をかけて．$(n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)na_n$

$\therefore\ (n+1)na_n = n(n-1)a_{n-1} = \cdots = 3\cdot 2a_2 = 2\cdot 1\cdot a_1$ （$n \geqq 2$ のとき）

$\therefore\ (n+1)na_n = 1$ $\quad \therefore\ \underline{a_n = \frac{1}{n(n+1)}}$ // これは $n=1$ でも成り立つ

$S_n = 1 - na_n$ より．$\underline{S_n = \frac{n}{n+1}}$ //