2016年 工学部 第3問

3 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{(x+e)^2}$ について，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $\dfrac{e}{x(x+e)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+e}$ が，x についての恒等式となるような定数 A，B の値を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x(x+e)}\,dx$ を求めよ．

(3) 部分積分法を用いて，定積分 $\displaystyle\int_1^{e^2}f(x)\,dx$ を求めよ．

(1) (右辺) $=\dfrac{A(x+e)+Bx}{x(x+e)}$

$=\dfrac{(A+B)x+Ae}{x(x+e)}$

左辺と係数を比べて，$A+B=0$ かつ $A=1$

$\therefore\ \underline{A=1,\ B=-1}$ //

(2) $\displaystyle\int\frac{1}{x(x+e)}\,dx=\frac{1}{e}\int\frac{1}{x}-\frac{1}{x+e}\,dx$ （∵(1)より）

$=\underline{\dfrac{1}{e}\left(\log|x|-\log|x+e|\right)+C}$ （Cは積分定数） //

(3) $\displaystyle\int_1^{e^2}f(x)\,dx=\int_1^{e^2}\left(-\frac{1}{x+e}\right)'\log x\ dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{\log x}{x+e}\right]_1^{e^2}+\int_1^{e^2}\frac{1}{x(x+e)}\,dx$

$\displaystyle=-\frac{2}{e^2+e}+\left[\frac{1}{e}\left(\log|x|-\log|x+e|\right)\right]_1^{e^2}$ （∵(2)より）

$\displaystyle=-\frac{2}{e^2+e}+\frac{1}{e}\left(2-\log(e^2+e)\right)-\frac{1}{e}\cdot\left(-\log(e+1)\right)$

$\displaystyle=-2\cdot\frac{1}{e(e+1)}+\frac{2}{e}-\frac{1}{e}\log\{e(e+1)\}+\frac{1}{e}\log(e+1)$

$\displaystyle=-2\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e+1}\right)+\frac{2}{e}-\frac{1}{e}\left(1+\log(e+1)\right)+\frac{1}{e}\log(e+1)$

$\displaystyle=\frac{2}{e+1}-\frac{1}{e}$

$=\underline{\dfrac{e-1}{e(e+1)}}$ //