0001812817818999

大阪工業大学

2014年 情報科学・知的財産 第3問

数理 石井K

3 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n(a_n + 2)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義されるとき，次の空所を埋めよ．

(1) $b_n = a_n + 1$ とおくと，$b_1 =$ ［ア］ 2 であり，$b_3 =$ ［イ］ 16 である．また，b_{n+1} を b_n を用いて表すと，$b_{n+1} =$ ［ウ］ となる．b_n^2

(2) $c_n = \log_2 b_n$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は初項 ［エ］ 1，公比 ［オ］ 2 の等比数列である．

(3) $c_8 =$ ［カ］ 128 だから，a_8 は ［キ］ 39 桁の整数である．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(1) $a_n = b_n - 1$ として与式に代入すると．$b_{n+1} - 1 = (b_n - 1)(b_n + 1)$

$\therefore \underline{b_{n+1} = b_n^2}_{//}$　　$\underline{b_1 = a_1 + 1 = 2}_{//}$　　$\underline{b_3 = b_2^2 = b_1^4 = 16}_{//}$

(2) (1)の $b_{n+1} = b_n^2$ の両辺 対数（底は2）をとると

$\log_2 b_{n+1} = 2\log_2 b_n$　　$\therefore c_{n+1} = 2c_n$

$\therefore \{c_n\}$ は初項 $c_1 = \log_2 b_1 = \log_2 2 = \underline{1}_{//}$，$\underline{公比\ 2}_{//}$ の等比数列

(3) (2)より．$c_n = 2^{n-1}$

$\therefore c_8 = 2^7 = \underline{128}_{//}$　　$b_n = 2^{c_n}$ より $a_n = 2^{c_n} - 1$

$\therefore a_8 = 2^{c_8} - 1 = 2^{128} - 1$

$10^{n-1} \leqq 2^{128} - 1 < 10^n$ とすると．

$\therefore 10^{n-1} < 2^{128} < 10^n$　（$\because 2^{128} = 10^k$ となることはないから）

$\therefore n - 1 < 128 \times \log_{10} 2 < n$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overset{\shortparallel}{38.5}$

$$\begin{array}{r} 0.301 \\ \times\ 128 \\ \hline 2408 \\ 602\ \\ 301\ \ \\ \hline 38.528 \end{array}$$

$\therefore \underline{39\ 桁}_{//}$