0002151908487999

大阪工業大学

2015年 情報科学・知的財産 第3問

数理 石井K

3 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{ka_n}{1+3a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める．ただし，k は正の定数とする．このとき，次の空所を埋めよ．

(1) $k=1$ のとき，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は初項 $\boxed{\text{ア}}$ 2，公差 $\boxed{\text{イ}}$ 3 の等差数列となり，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=\boxed{\text{ウ}}$ $\dfrac{1}{3n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である．

(2) $k \neq 1$ のとき，$c_n=\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{3}{k-1}$ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は初項 $\boxed{\text{エ}}$ $\dfrac{2k-5}{k-1}$，公比 $\boxed{\text{オ}}$ $\dfrac{1}{k}$ の等比数列となり，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=\dfrac{k-1}{3+\boxed{\text{カ}}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である．

カ：$(2k-5)\cdot\left(\dfrac{1}{k}\right)^{n-1}$

特に，$k=\boxed{\text{キ}}$ $\dfrac{5}{2}$ のとき，すべての自然数 n について a_n は一定の値である．

(1) $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+3a_n}$ より，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1+3a_n}{a_n}$ $\quad\therefore\ \dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+3$

$\therefore\ b_{n+1}=b_n+3$ $\quad\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公差 3 の等差数列 //

$\therefore\ b_n=3n-1$ $\quad\therefore\ a_n=\dfrac{1}{3n-1}$ //

(2) $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1+3a_n}{ka_n}$ $\quad\therefore\ \dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{3}{k}$

この式に，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=c_{n+1}+\dfrac{3}{k-1}$，$\dfrac{1}{a_n}=c_n+\dfrac{3}{k-1}$ を代入して，

$$c_{n+1}+\frac{3}{k-1}=\frac{1}{k}\left(c_n+\frac{3}{k-1}\right)+\frac{3}{k}$$

$\therefore\ c_{n+1}=\dfrac{1}{k}c_n$ $\quad\therefore$ 数列 $\{c_n\}$ は初項 $2-\dfrac{3}{k-1}=\dfrac{2k-5}{k-1}$，公比 $\dfrac{1}{k}$ の等比数列 //

$\therefore\ c_n=\dfrac{2k-5}{k-1}\cdot\left(\dfrac{1}{k}\right)^{n-1}$ $\qquad\therefore\ \dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2k-5}{k-1}\cdot\left(\dfrac{1}{k}\right)^{n-1}+\dfrac{3}{k-1}$

$\therefore\ a_n=\dfrac{k-1}{3+(2k-5)\cdot\left(\dfrac{1}{k}\right)^{n-1}}$ //

$k\neq 1$ より，$\left(\dfrac{1}{k}\right)^{n-1}$ は，n の値により変化する．$\therefore\ a_n$ が一定になるのは，$2k-5=0$

すなわち，$k=\dfrac{5}{2}$ のとき //