2015年 工学部 第4問

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=2\sqrt{1-x^2}$ に対し，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ 2\sqrt{1-a^2})$ における接線を ℓ とする．ℓ と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ Q，R とし，線分 QR の長さを d とするとき，次の問いに答えよ．ただし，$0<a<1$ とする．

(1) $f(x)$ を微分せよ．

(2) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(3) d^2 を a を用いて表せ．

(4) d の値が最小となるような a の値と，そのときの d の値を求めよ．

(1) $f(x)=2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ より，$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot(-2x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\underline{-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}$ //

(2) 接線は．$y=f'(a)(x-a)+f(a)$ より．

$\ell:\ y=-\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}(x-a)+2\sqrt{1-a^2}$　　$\therefore\ \underline{\ell:\ y=-\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}x+\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}}$ //

(3) $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{a},0\right)$，$\mathrm{R}\left(0,\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\right)$ なので．$d^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2$

$$=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{1-a^2}$$

$$=\underline{\frac{3a^2+1}{a^2(1-a^2)}}\ //$$

(4) $t=a^2$ $(0<t<1)$ とおいて d^2 を t で表したものを $g(t)$ とすると．

$$g(t)=\frac{3t+1}{t(1-t)}$$

$$g'(t)=\frac{3t(1-t)-(3t+1)(1-2t)}{t^2(1-t)^2}$$

$$=\frac{(3t-1)(t+1)}{t^2(1-t)^2}$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	(1)
$g'(t)$		$-$		$+$	
$g(t)$	(∞)	$\searrow$	9	$\nearrow$	(∞)

$\therefore$ $t=\frac{1}{3}$ のとき．$g(t)$ は最小値 9 をとる

$\therefore$ $\underline{a=\frac{\sqrt{3}}{3}\ のとき．d は最小値\ 3\ をとる}$ //