

2016年工学部第1問

 数理
石井K

1 次の空所を埋めよ.

- (1) 2次方程式 $2x^2 - 5x + 1 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha + \beta = \frac{5}{2}$ ア であり、 $2(\alpha - 2)(\beta - 2) = -1$ イ である.
- (2) $2^6 = 13 \times$ ウ $- 1$ であり、 2^{100} を13で割ると エ 余る. ただし、 $0 \leq$ エ < 13 とする.
- (3) 1辺の長さが2の正三角形OABがある. このとき、 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} =$ オ である. また、辺AB上の点Pが $\vec{OA} \cdot \vec{OP} = \frac{5}{2}$ を満たすとき、点Pは辺ABを カ $: 1$ に内分する.
- (4) 大小2つのさいころを同時に投げ、出た目の数をそれぞれ a, b とする. このとき、積 ab が偶数になる目の出方は キ 通りあり、 $a + 3b$ が5の倍数になる目の出方は ク 通りある.

(1) 解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = \frac{5}{2}$ 、 $\alpha\beta = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \therefore 2(\alpha - 2)(\beta - 2) &= 2\{\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4\} \\ &= 2\left(\frac{1}{2} - 5 + 4\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

(2) $2^6 = 13x - 1$ より $13x = 2^6 + 1 \therefore 13x = 65 \therefore x = 5$

$$2^{100} = (2^6)^{16} \cdot 2^4 = (13 \times 5 - 1)^{16} \cdot 16 = 16 \sum_{k=0}^{16} (13 \times 5)^k \cdot (-1)^{16-k} \cdot {}_{16}C_k \quad (2\text{項定理})$$

$$\therefore 2^{100} = 16(13N + (-1)^{16}) = 16 \cdot 13N + 16 \quad (N \text{ は整数})$$

$$\therefore 2^{100} \text{ を } 13 \text{ で割ると、} \underline{3 \text{ 余る}} //$$

(3) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = \underline{2} //$

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + (1-s)\vec{OB} \text{ とおくと、} \vec{OA} \cdot \vec{OP} = s|\vec{OA}|^2 + (1-s)\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 4s + 2(1-s) = 2s + 2$$

$$\therefore 2s + 2 = \frac{5}{2} \therefore s = \frac{1}{4} \therefore \vec{AP} \text{ を } \frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \underline{3:1} // \text{ に内分する.}$$

(4) a, b が偶数とならない. すなわち a, b が奇数となるのは、 a, b がともに奇数のときなので

$$3^2 = 9 \text{ 通り. よって、} 6^2 - 9 = \underline{27 \text{ 通り}} //$$

$$a + 3b \text{ が } 5 \text{ の倍数} \Leftrightarrow (a, b) = (1, 3), (2, 1), (2, 6), (3, 4), (4, 2), (5, 5), (6, 3)$$

$$\text{の } \underline{7 \text{ 通り}} //$$