

2015年工学部 第3問

 数理
石井K

 3 関数 $f(x) = \frac{(\log x)^2 - 3}{x}$ ($x > 0$) について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ を微分せよ。
 (2) $f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。
 (3) $\log x = t$ とおくことにより、不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ。
 (4) $\int_a^{e^3} f(x) dx = 0$ となるような正の数 a をすべて求めよ。

$$(1) f'(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \log x \cdot x - \{(\log x)^2 - 3\} \cdot 1}{x^2} = \frac{(\log x - 3)(\log x + 1)}{x^2} //$$

(2) (1) より $f'(x) = 0$ となるのは、 $x = e^3, e^{-1}$

| | | | | | | |
|---------|-----|-----|---------------|-----|-----------------|-----|
| x | (0) | ... | $\frac{1}{e}$ | ... | e^3 | ... |
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - |
| $f(x)$ | | ↓ | $-2e$ | ↑ | $\frac{6}{e^3}$ | ↓ |

∴ 極小値 $-2e$ ($x = \frac{1}{e}$ のとき), 極大値 $\frac{6}{e^3}$ ($x = e^3$ のとき) //

$$\begin{aligned}
 (3) \int f(x) dx &= \int \frac{(\log x)^2 - 3}{x} dx && \log x = t \text{ とおいて置換積分} \\
 & && \downarrow \frac{1}{x} dx = dt \\
 &= \int t^2 - 3 dt \\
 &= \frac{1}{3} (\log x)^3 - 3 \log x + C \quad (C \text{ は積分定数}) //
 \end{aligned}$$

(4) (3) より

$$\begin{aligned}
 \int_a^{e^3} f(x) dx &= \left[\frac{1}{3} (\log x)^3 - 3 \log x \right]_a^{e^3} \\
 &= 9 - 9 - \frac{1}{3} (\log a)^3 + 3 \log a \\
 &= \frac{1}{3} \log a \{ 9 - (\log a)^2 \}
 \end{aligned}$$

∴ $\int_a^{e^3} f(x) dx = 0$ より、 $\log a = \pm 3, 0$

$$\underline{a = e^{-3}, 1, e^3} //$$