0002020909797999

徳島大学

2015年 医学部 第2問　　1枚目／2枚

数理石井K

$\boxed{2}$ $a>0$とし，$I=\int_0^1 |ax-x\log(x+1)|\,dx$とする．

(1) 不定積分$\int \{ax-x\log(x+1)\}\,dx$を求めよ．

(2) $ax-x\log(x+1)=0$を満たすxを求めよ．

(3) Iをaを用いて表せ．

(4) aが$a>0$の範囲を動くとき，Iを最小にするaの値を求めよ．

(1) (与式) $=\int ax\,dx-\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log(x+1)\,dx$

$=\frac{a}{2}x^2+C-\frac{1}{2}x^2\log(x+1)+\int\frac{x^2}{2(x+1)}\,dx$

$=\frac{a}{2}x^2+C-\frac{1}{2}x^2\log(x+1)+\int\frac{(x+1)(x-1)+1}{2(x+1)}\,dx$

$=\frac{a}{2}x^2+C-\frac{1}{2}x^2\log(x+1)+\frac{1}{2}\int x-1+\frac{1}{x+1}\,dx$

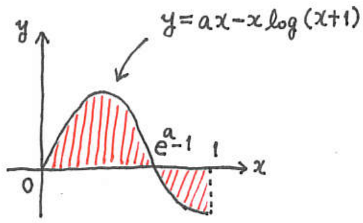
$=\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1)+C$ (Cは積分定数) //

(2) $x\{a-\log(x+1)\}=0$ と 真数条件 $x>-1$ より．

$x=0$ または．$x+1=e^a$　　$\therefore\ x=0,\ e^a-1$ //

(3) (2)より．$0\leqq x\leqq e^a-1$ において．$ax-x\log(x+1)\geqq 0$ ($\because a>0$ より) なので

(i) $e^a-1<1$ すなわち $0<a<\log 2$ のとき．



$I=\int_0^{e^a-1} ax-x\log(x+1)\,dx+\int_{e^a-1}^1 -\{ax-x\log(x+1)\}\,dx$

ここで．$F(x)=\int\{ax-x\log(x+1)\}\,dx$ とおくと．

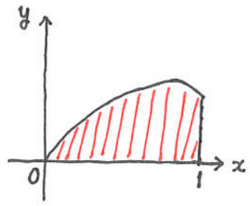
$I=\Big[F(x)\Big]_0^{e^a-1}-\Big[F(x)\Big]_{e^a-1}^1$

$=2F(e^a-1)-F(0)-F(1)$

(1)より．$F(e^a-1)=\frac{1}{4}e^{2a}-e^a+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}$，$F(0)=0$，$F(1)=\frac{a}{2}-\frac{1}{4}$

$\therefore\ I=\frac{1}{2}e^{2a}-2e^a+\frac{a}{2}+\frac{7}{4}$

(ii) $a\geqq\log 2$ のとき．$0\leqq x\leqq 1$ で $ax-x\log(x+1)\geqq 0$ なので



$I=\int_0^1 ax-x\log(x+1)\,dx=\Big[F(x)\Big]_0^1=F(1)-F(0)=\frac{a}{2}-\frac{1}{4}$

2015年 医学部 第2問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ $a>0$ とし，$I=\int_0^1 |ax-x\log(x+1)|\,dx$ とする．

(1) 不定積分 $\int \{ax-x\log(x+1)\}\,dx$ を求めよ．

(2) $ax-x\log(x+1)=0$ を満たす x を求めよ．

(3) I を a を用いて表せ．

(4) a が $a>0$ の範囲を動くとき，I を最小にする a の値を求めよ．

(3) のつづき

(i), (ii) より $I=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{2a}-2e^a+\frac{a}{2}+\frac{7}{4} & (0<a<\log 2 \text{ のとき})\\ \frac{a}{2}-\frac{1}{4} & (a\geqq \log 2 \text{ のとき})\end{cases}$ //

(4) $0<a<\log 2$ のとき

$I'(a)=e^{2a}-2e^a+\frac{1}{2}$　$\therefore I'(a)=0$ を解くと，$e^a=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a=\log\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$　$0<a<\log 2$ より，$a=\log\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

次に，$a\geqq\log 2$ のとき，$I'(a)=\frac{1}{2}>0$

よって，増減表は右のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\log\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$I'(a)$		$-$	0	$+$		$+$
$I(a)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

$\therefore$ I を最小にする a は，$a=\log\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ //