0001862727318999

茨城大学

2014年 第3問　1枚目／2枚

数理 石井K

3 A, E はそれぞれ行列 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を表す．以下の各問に答えよ．

(1) $A(A+2E)=a_1(A+2E)$, $A(A-3E)=b_1(A-3E)$ となる数 a_1, b_1 を求めよ．

(2) 各自然数 n に対して

$$A^n(A+2E)=a_n(A+2E), \quad A^n(A-3E)=b_n(A-3E)$$

となる数 a_n, b_n を求めよ．

(3) 各自然数 n に対して，$A^n=c_nA+d_nE$ となる数 c_n, d_n を求めよ．

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{d_1+d_2+\cdots+d_n}{a_n}$ を求めよ．

(5) 各自然数 n に対して c_n は整数であることを示せ．

(1) $A+2E=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ より． $A(A+2E)=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=3(A+2E)$

$\therefore\ \underline{a_1=3}$ //

$A-3E=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ より． $A(A-3E)=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}=-2(A-3E)$

$\therefore\ \underline{b_1=-2}$ //

(2) (1)をくり返すと．

$A^n(A+2E)=A^{n-1}\cdot A(A+2E)=A^{n-1}\cdot a_1(A+2E)=a_1A^{n-1}(A+2E)=\cdots=a_1^n(A+2E)$

$\therefore\ \underline{a_n=3^n}$ //

同様に，$A^n(A-3E)=b_1^n(A-3E)$　$\therefore\ \underline{b_n=(-2)^n}$ //

(3) (2)より． $\begin{cases} A^{n+1}+2A^n=3^n(A+2E) & \cdots① \\ A^{n+1}-3A^n=(-2)^n(A-3E) & \cdots② \end{cases}$

①−②より． $5A^n=(3^n-(-2)^n)A+(2\cdot3^n+3\cdot(-2)^n)E$

$\therefore\ \underline{c_n=\frac{1}{5}\{3^n-(-2)^n\},\ d_n=\frac{1}{5}\{2\cdot3^n+3\cdot(-2)^n\}}$ //

(4) $d_1+d_2+\cdots+d_n=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^k+\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}3\cdot(-2)^k=\frac{2}{5}\cdot\frac{3(1-3^n)}{1-3}+\frac{3}{5}\cdot\frac{-2\{1-(-2)^n\}}{1+2}$

$\therefore\ d_1+d_2+\cdots+d_n=\frac{3}{5}(3^n-1)-\frac{2}{5}\{1-(-2)^n\}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{d_1+d_2+\cdots+d_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{5}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)-\frac{2}{5}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}=\underline{\frac{3}{5}}$ //

茨城大学

2014年 第3問　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ A, Eはそれぞれ行列$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$を表す．以下の各問に答えよ．

(1) $A(A+2E)=a_1(A+2E)$, $A(A-3E)=b_1(A-3E)$となる数a_1, b_1を求めよ．

(2) 各自然数nに対して

$$A^n(A+2E)=a_n(A+2E), \quad A^n(A-3E)=b_n(A-3E)$$

となる数a_n, b_nを求めよ．

(3) 各自然数nに対して，$A^n=c_nA+d_nE$となる数c_n, d_nを求めよ．

(4) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{d_1+d_2+\cdots+d_n}{a_n}$を求めよ．

(5) 各自然数nに対してc_nは整数であることを示せ．

(5) 数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$のとき.

$c_1=\frac{1}{5}\{3^1-(-2)^1\}=1$ より c_1は整数 ∴成り立つ

(ii) $n=k$のとき成り立つと仮定すると.

$c_k=\frac{1}{5}\{3^k-(-2)^k\}$ は整数

このとき. $c_{k+1}=\frac{1}{5}\{3^{k+1}-(-2)^{k+1}\}$

$=\frac{1}{5}\{3^k-(-2)^k\}\cdot\{3+(-2)\}+\frac{1}{5}\cdot 2\cdot 3^k+3\cdot(-2)^k\cdot\frac{1}{5}$

$=c_k+\frac{2}{5}\{3^k-(-2)^k\}+3\cdot(-2)^k$

$=3c_k+3\cdot(-2)^k$

∴ c_kは整数なので，c_{k+1}も整数となる

∴ $n=k+1$のとき成り立つ

(i), (ii)より

自然数nに対して. c_nは整数である ■