



2012年理系第3問

3 次の問いに答えよ.

(1)  $f(t)$  を  $0 \leq t \leq 1$  で連続な関数とする.  $\tan x = t$  とおいて,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x} dx = \int_0^1 f(t) dt$$

であることを示せ.

(2) (1) を用いて,  $0$  以上の整数  $n$  に対し,  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x} dx$  の値を求めよ. また,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx \leq \frac{1}{n+1}$$

を示せ.

(3)  $0$  以上の整数  $n$  と  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  を満たす  $x$  に対し,

$$\frac{1 - \tan^2 x + \tan^4 x - \cdots + (-1)^n \tan^{2n} x}{\cos^2 x} = 1 - (-1)^{n+1} \tan^{2(n+1)} x$$

であることを示せ.

(4) (2) と (3) を用いて,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2k+1}$  の値を求めよ.