0002203096977999

室蘭工業大学

2016年 工学部 第4問

数理 石井K

[4] 各項が正の数である2つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は

$$a_1 = 1,\quad b_1 = e,$$
$$a_{n+1} = {a_n}^5 \cdot {b_n}^3,\quad b_{n+1} = \frac{b_n}{a_n}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．ただし，eは自然対数の底とする．

(1) $c_n = \log a_n$, $d_n = \log b_n$ とおく．ただし，対数は自然対数とする．

$$c_{n+1} + \alpha d_{n+1} = \beta(c_n + \alpha d_n)$$

を満たす定数 α, β の組をすべて求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_n > 0$, $b_n > 0$ より．$a_{n+1} = a_n^5 \cdot b_n^3$ の両辺，対数をとって

$\log a_{n+1} = 5\log a_n + 3\log b_n$

$\therefore\ c_{n+1} = 5c_n + 3d_n \cdots ①$

同様に $b_{n+1} = \frac{b_n}{a_n}$ の両辺，対数をとって

$\log b_{n+1} = \log b_n - \log a_n$

$\therefore\ d_{n+1} = d_n - c_n \cdots ②$

①,②を $c_{n+1} + \alpha d_{n+1} = \beta(c_n + \alpha d_n)$ に代入して．

$(5-\alpha)c_n + (3+\alpha)d_n = \beta c_n + \alpha\beta d_n$

$\therefore \begin{cases} 5-\alpha = \beta \\ 3+\alpha = \alpha\beta \end{cases}$ βを消去して．$3+\alpha = \alpha(5-\alpha)$

$\alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0$

$(\alpha-1)(\alpha-3) = 0$ $\therefore \alpha = 1, 3$ $\therefore\ \underline{(\alpha, \beta) = (1, 4), (3, 2)}$ //

(2) (1)より．$c_{n+1} + d_{n+1} = 4(c_n + d_n) \cdots ③$

$c_{n+1} + 3d_{n+1} = 2(c_n + 3d_n) \cdots ④$

$c_1 = 0$, $d_1 = 1$ と③より $c_n + d_n = 4^{n-1}$ ④より $c_n + 3d_n = 3\cdot 2^{n-1}$

これらより．$c_n = \frac{3}{2}(4^{n-1} - 2^{n-1})$, $d_n = \frac{1}{2}(3\cdot 2^{n-1} - 4^{n-1})$

$\therefore\ \underline{a_n = e^{\frac{3}{2}(4^{n-1} - 2^{n-1})}}$ //

$\underline{b_n = e^{\frac{1}{2}(3\cdot 2^{n-1} - 4^{n-1})}}$ //