

2013年第1問

1 次の問いに答えよ。

(1) $t = \tan \frac{x}{2}$ とおくと、次の等式が成り立つことを示せ。

$$(i) \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad (ii) \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (iii) \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

(2) a, b を実数とする。 x を未知数とする方程式 $a \sin x + b \cos x + 1 = 0$ が、 $-\pi < x < \pi$ の範囲に異なる二つの解をもつとする。(i) a, b の満たすべき条件を求めよ。(ii) 二つの解を α, β とするとき、 $\tan \frac{\alpha + \beta}{2}$ を a, b を用いて表せ。

(3) 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x + 1} dx$$