

2015年第3問

3  $a, b$ は  $0 < a < b$ を満たす定数とし、関数  $y = \log x$ のグラフを  $G$ とする。点  $C$ が曲線  $G$ 上を点  $A(a, \log a)$ から点  $B(b, \log b)$ まで動くとき、点  $C$ から  $x$ 軸への垂線と線分  $AB$ との交点を  $P$ とし、線分  $CP$ の長さの最大値を  $L$ とする。このとき、以下の問に答えよ。ただし、 $\log x$ は自然対数を表すものとする。

- (1) 不等式  $a < \frac{b-a}{\log b - \log a} < b$ が成り立つことを証明せよ。
- (2)  $h = \frac{b}{a}$ とおくとき、 $L$ を  $h$ を用いて表せ。
- (3) 実数  $p, q, r$ が  $a < p < b, a < q < b, a < r < b$ を満たすとき、不等式

$$\frac{p+q+r}{3} < e^L \sqrt[3]{pqr}$$

が成り立つことを証明せよ。ただし、 $e$ は自然対数の底とする。