大阪教育大学

2016年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 実数 a, b に対して，座標空間の3点 O(0, 0, 0)，P(1, 0, a)，Q(0, 2, b) を考える．三角形OPQの面積を S とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を a, b を用いて表せ．

(2) S を a, b を用いて表せ．

(3) 3点 O, P, Q が定める平面上に点 R(1, 1, 1) があるとき，a と b の関係を求め，S の最小値を求めよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \sqrt{a^2+1}$, $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \sqrt{b^2+4}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = ab$ より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}$$

$$= \underline{\frac{ab}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+4}}} \;//$$

(2) $$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+1)(b^2+4)-a^2b^2}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2+4}} \;//$$

(3) O, P, Q が定める平面上に点Rがあることから

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ （s, t は実数）と表せる

$(1, 1, 1) = (s, 2t, sa+tb)$

∴ 各成分を比較して，$s=1$, $t=\frac{1}{2}$, $a+\frac{1}{2}b=1$

∴ $\underline{b=-2a+2}$ //

このとき，$S = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+(-2a+2)^2+4}$

$$= \sqrt{2a^2-2a+2}$$

$$= \sqrt{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$$

∴ $\underline{S\text{の最小値は }\frac{\sqrt{6}}{2}\ \left(a=\frac{1}{2},\ b=1\text{ のとき}\right)}$ //