大阪教育大学

2016年第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 以下の問に答えよ.

(1) $\displaystyle\int_0^x \sin^3 t\,dt$ を求めよ.

(2) 関数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x (e^{3x}-e^{3t})\sin^3 t\,dt$ を x について微分せよ.

(3) $F'(x) \geqq 0$ を証明せよ.

(1)
$$\int_0^x \sin^3 t\,dt = \int_0^x \sin t(1-\cos^2 t)\,dt$$
$$= \int_0^x \sin t - \sin t\cos^2 t\,dt$$
$$= \left[-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^x$$
$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + 1 - \frac{1}{3}$$
$$= \underline{\frac{1}{3}(\cos^3 x - 3\cos x + 2)}\ //$$

(2)
$$F(x) = e^{3x}\int_0^x \sin^3 t\,dt - \int_0^x e^{3t}\sin^3 t\,dt$$
$$\therefore F'(x) = 3e^{3x}\int_0^x \sin^3 t\,dt + e^{3x}\sin^3 x - e^{3x}\sin^3 x$$
$$= 3e^{3x}\cdot\frac{1}{3}(\cos^3 x - 3\cos x + 2)$$
$$= \underline{e^{3x}(\cos^3 x - 3\cos x + 2)}\ //$$

(3) (2)より
$$F'(x) = e^{3x}(\cos x - 1)^2(\cos x + 2)$$
$e^{3x} > 0$, $-1 \leqq \cos x \leqq 1$ より $F'(x) \geqq 0$ ▨